

Vektorräume

Vektorräume

Letzte Vorlesung:

- grundlegende Definition,
- Untervektorraum,
- lineare Abbildungen.

Heute:

- weitere Definitionen zu linearen Abbildungen,
- lineare Unabhängigkeit,
- Basis und Dimension,
- Koordinatenverständnis.

Vektorraum

Definition:

Sei K ein Körper. Ein **Vektorraum** V mit Skalaren aus K besteht aus einer kommutativen Gruppe $(K, +)$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot : K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, sodass für alle $v, w \in V, \lambda, \mu \in K$ gilt:

$$(V1) \quad \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$$

$$(V2) \quad 1 \cdot v = v$$

$$(V3) \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$$

$$(V4) \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

Lineare Abbildungen

Definition:

Seien U, V Vektorräume. Sei $f : U \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann heißt:

$$\text{Ker}(f) := \{u \in U \mid f(u) = 0\} \text{ **Kern** von } f,$$

$$\text{Im}(f) := \{v \in V \mid \exists u \in U \text{ mit } f(u) = v\} \text{ **Bild** von } f.$$

Im Grunde kennen wir diese Definition schon. Es ist genau dieselbe wie für Homomorphismen, lediglich die Notation ist etwas anders.

Lineare Abbildungen

Anmerkung:

Diese Definitionen wirken im ersten Moment nicht sehr nützlich, aber man kann damit einiges anfangen, wie wir im Laufe dieses Kapitels feststellen werden.

Außerdem:

Man kann zeigen, dass gilt: $f : U \rightarrow V$ ist genau dann injektiv, wenn $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Es gilt auch noch, dass $\text{Ker}(f)$ bzw. $\text{Im}(f)$ Unterräume von U bzw. von V sind.

Diese zwei Sätze sollten wir uns merken, wir werden sie noch in der Zukunft brauchen.

Lineare Unabhängigkeit

Lineare Unabhängigkeit

Wir wollen uns mit Untervektorräumen beschäftigen.
Insbesondere was man alles braucht um diese Teilräume vollständig zu beschreiben:

Um das zu erreichen, brauchen wir das Konzept der **Linearen Abhängigkeit** bzw. **Linearen Unabhängigkeit** von Vektoren.

Lineare Unabhängigkeit

Nehmen wir an wir haben 4 Vektoren u_1, u_2, u_3 und u_4 . Wenn wir u_4 folgendermaßen darstellen können:

$$u_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$$

mit $\lambda_i \in K$. Dann sagen wir, dass u_4 **linear abhängig** ist von u_1, u_2, u_3 . Man kann es als **Linearkombination** von u_1, u_2, u_3 darstellen.

Wenn wir keine solchen λ_i finden können, dann sagen wir, dass u_4 **linear unabhängig** ist von u_1, u_2, u_3 ist.

Es gilt also immer, dass ein Vektor entweder linear abhängig oder unabhängig von einer Menge von Vektoren ist.

Lineare Unabhängigkeit

Wie schaut es umgekehrt aus?

Wir haben $u_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$. Das kann man aber zB umformen zu

$$u_1 = \frac{-1}{\lambda_1} u_4 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} u_3$$

Dh auch u_1 ist linear abhängig und zwar von u_2, u_3, u_4 .

Warnung:

Das funktioniert natürlich nur, wenn keines der $\lambda_i = 0$ ist

Warnung:

Es gibt einen kleinen, aber feinen Unterschied zwischen der linearen (Un)abhängigkeit eines Vektors von einer Menge von Vektoren und der linearen (Un)abhängigkeit einer Menge von Vektoren.

Lineare Unabhängigkeit

Anmerkung:

Wir hatten die lineare (Un)abhängigkeit von einem Vektor von einer Menge von Vektoren und nun kommt die lineare (Un)abhängigkeit einer Menge von Vektoren

Definition:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n des K -Vektorraums V heißen **linear unabhängig**, wenn für jede Linearkombination der Vektoren gilt:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = 0$$

Die Vektoren heißen **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Lineare Unabhängigkeit

Anmerkung:

Eine Menge von Vektoren ist dann linear abhängig, wenn ein Vektor daraus linear abhängig von den restlichen Vektoren ist.

Lineare Unabhängigkeit

Beispiel:

Wir haben $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir wollen wissen, ob diese linear abhängig oder unabhängig sind.

$$\textbf{Ansatz: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ident zu $1 = \lambda_2 + \lambda_3$ und $0 = \lambda_2 + 2\lambda_3$.

Wir formen um zu $\lambda_2 = 1 - \lambda_3$ und setzen ein. Dann bekommen wir $\lambda_3 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.

$$\text{Es gilt also } 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir konnten also zeigen, dass es eine abhängige Linearkombination gibt, sodass $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig ist.

Lineare Unabhängigkeit

Allerdings:

Wir haben $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und wollen wissen, ob diese linear abhängig oder unabhängig sind.

Es ist klar, dass v_1 linear abhängig von v_2, v_3 ist (schließlich ist $v_1 = v_2$), aber v_3 ist linear unabhängig von v_1, v_2 . Man kann v_3 schlicht nicht durch eine Linearkombination von v_1 und v_2 darstellen.

Damit die gesamte Menge linear abhängig ist, genügt es aber, wenn ein einzelner Vektor linear abhängig ist von den anderen. Dh $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear abhängig.

Lineare Unabhängigkeit

Beispiel:

Ist die Menge mit $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig oder unabhängig?

Das dürft ihr nun ausrechnen!

Lineare Unabhängigkeit

Beispiel-Lösung:

Ansatz: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dh $3 = \lambda_1 + \lambda_2$ und $2 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow 3 - \lambda_1 = 2 - 3\lambda_1$
 $\Rightarrow 1 = -2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{7}{2}$

Probe: $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wir sehen, die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear abhängig.

Lineare Unabhängigkeit

Anmerkung:

Wir sehen, dass das Konzept der Linearen (Un)abhängigkeit sehr stark damit zusammenhängt, ob man einen Vektor als Linearkombination darstellen kann.

Anders ausgedrückt: v_1 ist linear abhängig von v_2, v_3, \dots, v_n , wenn gilt $v_1 \in \text{Span}(v_2, v_3, \dots, v_n)$

$\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ bedeutet ja die Menge aller Linearkombinationen von v_1, v_2, \dots, v_n . Wenn nun aber v_1 selber eine Linearkombination von v_2, \dots, v_n ist, dann führt das dazu, dass die Menge der Linearkombinationen von v_1, \dots, v_n dieselben sind wie von v_2, \dots, v_n .

Also: $v_1 \in \text{Span}(v_2, v_3, \dots, v_n) \Rightarrow$
 $\text{Span}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) = \text{Span}(v_2, v_3, \dots, v_n).$

Lineare Unabhängigkeit

Erklärung:

Wir haben v_1, v_2 und v_3 , wobei $v_3 \in \text{Span}(v_1, v_2)$ liegt, also $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

Es ist klar, dass $\text{Span}(v_1, v_2) \subset \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ ist, aber gilt dies auch umgekehrt?

Wir haben $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, dies können wir umformen zu
 $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$
 $\Rightarrow u = (\lambda_1 + \lambda_3 \lambda_1) v_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 \lambda_2) v_2$

Also $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) \subset \text{Span}(v_1, v_2)$ und damit $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2)$

Basis, Dimension

Basis, Dimension

Einleitung:

Wir haben den Begriff der linearen (Un)abhängigkeit von Vektoren kennengelernt.

Und wir haben gesehen, wie lineare Abhängigkeit mit dem Span von Vektoren zusammenhängt.

Jetzt wollen wir - wie vorher angekündigt - den Zusammenhang zu Teilräumen herstellen. Genauer gesagt wir wollen wissen, was wir brauchen um einen Teilraum aufzuspannen. Was erzeugt ein Teilraum?

Basis, Dimension

Einleitung:

Wir suchen etwas, dass zB den \mathbb{R}^2 aufspannt. Nehmen wir etwa $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wenn wir einen beliebigen Vektor $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ haben, dann sehen wir sofort, dass wir u darstellen können, als $u = \lambda v_1 + \mu v_2$.

Wir können jeden beliebigen Vektor aus \mathbb{R}^2 darstellen, dh $\text{Span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$

Andererseits ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig (trivial nachzuprüfen), dh wir können auch keinen Vektor rausschmeissen ohne dass der Span kleiner wird. $\{v_1, v_2\}$ ist die kleinstmögliche Menge, die \mathbb{R}^2 aufspannt. Wir nennen sowas **Basis** von \mathbb{R}^2 .

Basis, Dimension

Definition:

Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge B von V heißt Basis von V , wenn gilt:

(B1) $\text{Span}(B) = V$

(B2) B ist eine linear unabhängige Menge von Vektoren.

Bedingung (B1) würden wir ausdrücken als: B erzeugt V .

Basis, Dimension

Beispiele:

1) Für \mathbb{R}^2 kennen wir schon eine Basis und zwar $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Diese Basis nennt man Standardbasis des \mathbb{R}^2 .

2) Für \mathbb{R}^n ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Standardbasis.

3) Für \mathbb{R}^2 gibt es aber mehr als eine Basis, so ist auch $\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ etwa eine Basis.

Zeige, dass es tatsächlich eine Basis des \mathbb{R}^2 ist!

Basis, Dimension

Lösung:

(B1) Sei $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Wir suchen λ_1 und λ_2 , sodass $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ ist. Dh $x = 3\lambda_1 + \lambda_2$ und $y = 2\lambda_1 + 2\lambda_2$. Das können wir umformen zu $\lambda_1 = \frac{x}{2} - \frac{y}{4}$ und $\lambda_2 = \frac{3y}{4} - \frac{x}{2}$. Wir können also alle Vektoren als Linearkombination von v_1 und v_2 darstellen.

(B2) $\{v_1, v_2\}$ ist linear unabhängig, denn angenommen $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0$, also $3\mu_1 + \mu_2 = 0$ und $2\mu_1 + 2\mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\mu_2$. Wir setzen das in die erste Formel ein: $3\mu_1 - \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0$

$\{v_1, v_2\}$ ist damit eine Basis des \mathbb{R}^2 .

Basis, Dimension

Wichtig:

Wir haben gesehen, dass es nicht nur eine Basis des \mathbb{R}^2 gibt. Fast alle Vektorräume haben mehrere mögliche Basen.

Die Frage ist: Was haben diese Basen gemeinsam?

Antwort:

Die Anzahl der Vektoren.

Man kann zeigen:

Satz: Hat der Vektorraum V eine endliche Basis B mit n Elementen, so hat jede andere Basis von V ebenfalls n Elemente.

Basis, Dimension

Definition:

Sei $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraums V . Dann heißt die Zahl n Dimension von V . Wir schreiben hierfür $n = \dim(V)$. Dem Nullraum $\{0\}$ wird die Dimension 0 zugeordnet.

Basis, Dimension

Anmerkungen:

Jede Basis hat n Vektoren. Dh finden wir in \mathbb{R}^n eine Menge von n linear unabhängigen Vektoren, dann wissen wir, dass diese eine Basis darstellen.

Wir haben zwei Vektoren v_1 und $v_2 \in \mathbb{R}^2$, die linear unabhängig sind. \mathbb{R}^2 hat die Dimension 2, dh die Menge $\{v_1, v_2\}$ ist eine Basis von \mathbb{R}^2 und $\text{Span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$.

Wenn wir uns in einem Vektorraum der Dimension n bewegen, ist es nicht möglich $n + 1$ linear unabhängige Vektoren zu finden.

Basis, Dimension

Ausführungen:

Nehmen wir an wir haben in \mathbb{R}^n eine Menge von k linear unabhängigen Vektoren ($k < n$) und betrachten $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k) = U$. Wir wissen, dass $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum ist, also selbst ein Vektorraum ist.

Da U ein Vektorraum ist, hat U auch eine Basis und wir sehen sofort ein, dass $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ eine solche ist, dh U hat Dimension k .

Wir haben bei der Einleitung zur Linearen (Un)abhängigkeit gefragt, was man alles braucht um einen Teilraum vollständig zu beschreiben. Nun wissen wir, dass wir für ein Teilraum der Dimension k genau k linear unabhängige Vektoren brauchen um ihn vollständig zu beschreiben.

Welche Basis genau verwendet wird ist nicht so wichtig, denn man kann mit Hilfe eines Isomorphismus zwischen Basen hin und her wechseln.

Basis, Dimension

Nehmen wir an :

Wir haben eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir haben viel über lineare Abbildungen gelernt und vieles gehört.
Schauen wir mal, was wir davon auch anwenden können.

1) Beweise, dass φ eine lineare Abbildung ist!

Basis, Dimension

Beweis 1) :

$$(LA1) \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + \varphi \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$(LA2) \quad \varphi \left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \varphi \left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

Basis, Dimension

Wir haben zuvor den Satz erwähnt, dass für $\varphi : U \rightarrow V$ $\varphi(U)$ ein Vektorraum ist.

Wir haben immer noch $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Beweise, dass $\varphi(\mathbb{R}^2)$ ein Vektorraum ist.

Basis, Dimension

Beweis 2) :

Wir müssten zuerst zeigen, dass $(\mathbb{R}, +)$ eine kommutative Gruppe ist, aber das haben wir schon früher gezeigt.

$$(V1) \quad \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mu x_1 \\ \lambda \mu x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (\lambda \mu) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(V2) Das Einselement in $(\mathbb{R}, +)$ ist 1

$$1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis, Dimension

Beweis 2) :

$$(V3) \quad \lambda \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + y_1) \\ \lambda(x_2 + y_2) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ \lambda x_2 + \lambda y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(V4) \quad (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_1 \\ (\lambda + \mu)x_2 \\ (\lambda + \mu)0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_1 \\ \lambda x_2 + \mu x_2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi(\mathbb{R}^2)$ ist ein Vektorraum

Basis, Dimension

Wir haben früher den Satz erwähnt, dass für $\varphi : U \rightarrow V$ φ injektiv ist, wenn $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ ist.

3) Beweise, dass für unser $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ gilt und φ injektiv ist.

Basis, Dimension

Beweis 3) :

a) Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ker } \varphi = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x) = 0\} = \{(0, 0)\}$$

b) Ang. wir haben $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ mit $x \neq y$, sodass gilt

$$\varphi(x) = \varphi(y). \text{ Dh } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ daraus folgt } x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2.$$

Also $x = y$. **Widerspruch!**

φ ist injektiv

Basis, Dimension

Wir wissen nun, dass φ injektiv ist.

4) Ist es auch surjektiv?

Basis, Dimension

Beweis 4) :

Es ist $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Wir behaupten, dass es kein $x \in \mathbb{R}^2$ gibt, sodass $\varphi(x) = y$ gelten kann.

Es wäre sonst $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $x_1 = 0, x_2 = 0$ und $0 = 1$. **Widerspruch!**

φ ist nicht surjektiv.

Basis, Dimension

Es gibt in der Linearen Algebra, den wichtigen Satz:

$$\dim(U) = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi) \text{ für } \varphi : U \rightarrow V$$

Allgemein, werden wir diesen Satz nicht beweisen, aber:

5) Zeige, dass dies für unser φ gilt.

Basis, Dimension

Beweis 5) :

Wir wissen, dass $\text{Dim}(\mathbb{R}^2)=2$ gilt. Außerdem, dass $\text{Ker}\varphi=\{0\}$ ist und damit gilt $\text{Dim}(\text{Ker}\varphi)=0$.

Damit der Satz für dieses Beispiel stimmt, müssen wir also noch zeigen, dass $\text{Dim}(\text{Im}\varphi)=2$ gilt.

Wir müssen also eine Menge von linear unabhängigen Vektoren finden, die $\text{Im}\varphi$ aufspannt.

Basis, Dimension

Beweis 5) :

Ansatz: Wir probieren, ob $B = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ das kann.

Wir haben $v \in \text{Im}\varphi$ beliebig, also $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir können nun v darstellen als $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, dh B spannt $\text{Im}\varphi$ vollständig auf.

Sind v_1, v_2 linear unabhängig? Ja, denn es gibt kein $\lambda \in \mathbb{R}$, für das gilt $\lambda v_1 = v_2$.

$\Rightarrow B$ ist eine Basis von $\text{Im}\varphi$

Basis, Dimension

Beweis 5) :

Da $|B| = 2$ ist, gilt also $\text{Dim}(\text{Im}\varphi)=2$ und damit haben wir also:

$$\text{Dim}(U)=2=0+2=\text{Dim}(\text{Ker}\varphi)+\text{Dim}(\text{Im}\varphi)$$

Basis, Dimension

Wir haben nun einige kleinere Beweise gesehen und durchgeführt. In der allerersten Einheit haben wir über die verschiedenen Varianten von möglichen Beweisen in der Mathematik gelernt und haben manche davon nun auch selber angewandt, dh *direkter Beweis*, *Beweis durch Widerspruch* und *Beweis durch Gegenbeispiel*.

Beweis durch Gegenbeispiel ist quasi ein indirekter Beweis, da wir zeigen, dass eine Annahme nicht stimmt und wenn lediglich die Möglichkeiten A oder $\neg A$ existieren, bleibt nur eines davon über.

Basis, Dimension

Anmerkungen:

Der Satz $\text{Dim}(U) = \text{Dim}(\text{Ker}\varphi) + \text{Dim}(\text{Im}\varphi)$ hat noch eine andere sehr interessante Auswirkung:

Nehmen wir an, dass wir zwei isomorphe Vektorräume haben, also ein bijektives $\varphi : U \rightarrow V$.

Ein bijektives φ ist auch injektiv. Wir haben früher schon erwähnt, dass dann gilt $\text{Ker}\varphi = \{0\}$, dh $\text{Dim}(\text{Ker}\varphi) = 0$.

Da $\text{Im}\varphi = V$ ist (φ ist ja surjektiv), gilt:

$$\text{Dim}(U) = \text{Dim}(\text{Im}\varphi) = \text{Dim}(V)$$

U und V haben also die gleiche Dimension!

Basis, Dimension

Anmerkungen:

Man kann davon auch die Umkehrungen zeigen, also:

Wenn zwei Vektorräume U und V die gleiche Dimension haben, dann sind sie isomorph.

Da wir für jede beliebige natürliche Zahl n einen Vektorraum kennen mit jener Dimension, nämlich \mathbb{R}^n , wissen wir, dass wir alle endlichen Vektorräume kennen!

Jeder endlich dimensionale Vektorraum ist isomorph zu einem \mathbb{R}^n , dh hat dieselbe Struktur. Wir können uns also in der Untersuchung von endlich dimensional Vektorräumen auf \mathbb{R}^n beschränken.

Basis, Dimension

Anmerkungen:

Seien nun U, V zwei Vektorräumen mit gleicher Dimension und $\varphi : U \rightarrow V$ eine injektive lineare Abbildung.

Da nun $\text{Dim}(\text{Ker}\varphi)=0$ ist, haben wir $\text{Dim}(\text{Im}\varphi)=\text{Dim}(V)$

Dies bedeutet, dass φ surjektiv ist, damit also bijektiv und die beiden Vektorräume sind isomorph.

Sei $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ die Basis von U . Wir behaupten nun, dass die Menge $C = \{\varphi(b_1), \varphi(b_2), \dots, \varphi(b_n)\}$ eine Basis von V ist.

Basis, Dimension

Beweis:

Da U und V isomorph stimmt die Anzahl der Elemente von C , man muss nur zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

Dh wir müssen zeigen, dass gilt

$$\mu_1\varphi(b_1) + \mu_2\varphi(b_2) + \cdots + \mu_n\varphi(b_n) = 0 \Rightarrow \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n = 0$$

$\sum_i \mu_i \varphi(b_i) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\sum_i \mu_i b_i) = 0$. Da $\text{Ker}\varphi = \{0\}$ ist, also $\varphi(\sum_i \mu_i b_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_i \mu_i b_i = 0$. Da B linear unabhängig ist, folgt daraus $\mu_i = 0$ für alle i .

C ist linear unabhängig, also eine Basis.

Basis, Dimension

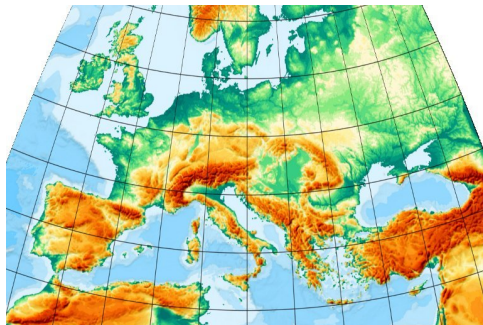
Erläuterung:

Wenn wir also eine injektive Abbildung haben, dann können wir ganz leicht eine neue Basis finden.

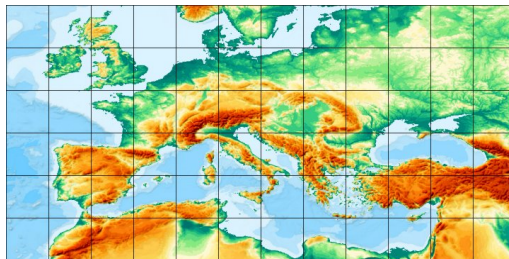
Das ist insbesondere interessant, wenn wir eine lineare Abbildung von einem Vektorraum auf sich selbst haben, denn es kann oft wichtig sein, zwischen zwei Basen hin und her zu wechseln.

Einfaches Beispiel: Wir haben einen Globus, der ja in der Nähe der Pole stark verzerrt ist. Wir wollen ihn dann an einem Punkt lokal entzerren um uns ein besseres Bild zu machen.

Basis, Dimension



Basis, Dimension



Zugegeben: Eine nicht-lineare Transformation wäre hier vernünftiger.

Basis, Dimension

Wir sehen also, dass es praktisch sein kann eine Basis zu wechseln. Wir haben all das notwendige Werkzeug nun um zu lernen was solche linearen Transformationen alles können.

Zuerst aber wollen wir noch ein paar Begriffe näher erläutern ehe wir uns auf dieses Gebiet wagen.

Lineare Transformation ... Matrix

Koordinaten

Koordinaten:

Wir haben ein intuitives Verständnis von Koordinaten. Wenn wir etwa $u = (1, 3, 2)$ haben, dann meinen wir damit, dass wir 1 Einheit auf der x -Achse gehen, 3 auf der y -Achse und 2 auf der z -Achse. Aber das stimmt so nicht!

Korrekt ist das nur bezüglich der Standardbasis.

Koordinaten sagen eigentlich aus, wie oft wir einen Vektor aus der Basis verwenden um zu u zu kommen, dh $u = v_1 + 3v_2 + 2v_3$ für eine Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Koordinaten

Satz/Definition:

Ist $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraums V , so gibt es für jeden Vektor $v \in V$ eindeutig bestimmte Elemente x_1, x_2, \dots, x_n mit der Eigenschaft

$$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$$

Die x_i heißen Koordinaten von v bezüglich B . Wir schreiben dafür

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

Koordinaten

Beispiel:

Für die Standardbasis $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist es einfach die

Koordinaten zu finden. Wenn wir einen Vektor u haben, der auf der x -Achse 1 Einheit weit ist, 3 auf der y -Achse und 2 auf der z -Achse, dann ist klarerweise $u = v_1 + 3v_2 + 2v_3$, hat also die Koordinaten $(1, 3, 2)_S$.

Wenn wir denselben Vektor über der Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

betrachten, dann hat er die Koordinaten $u = (\frac{-5}{4}, \frac{17}{4}, \frac{-3}{4})_B$.

Koordinaten

Anmerkung:

Wie wir wissen, kann man zwischen Basen hin und her wechseln. Die Koordinaten händisch ausrechnen ist recht umständlich und deswegen berechnet man sich die Transformation, also die Matrix, die zu diesem Wechsel fähig ist.

⇒ Matrizen bei Prof. Gansterer in der nächsten Einheit

Übersicht über algebraische Strukturen

